অধ্যায় ৪
সূচক ও লগারিদম

MAIN TOPIC

সূচক

সূচক কী ?

→ কোন রাশিতে একই উৎপাদক যতবার গুণ আকারে থাকে তাকে ওই উৎপাদকের সূচক বলে। যেমন-

$$a^2 = a \times a$$

$$a^4 = a \times a \times a \times a$$

এখানে,

শর্তাবলি, $a \in \mathbb{R}$ (বাস্তব সংখ্যার সেট)এবং $n \in \mathbb{Q}$ (মুলদ সংখ্যার সেট)

অর্থাৎ, a যেকোন বাস্তব সংখ্যা এবং n যেকোন ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হলে, n সংখ্যক ক্রমিক গুণ হলো a^n।

অর্থাৎ, $a \times a \times a \dots \times a$ (n সংখ্যকবার a) $= a^n$।

(১) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = a^m \div b^m (b \neq 0)$

অথবা, $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

উদাহরণ:

- $x^4 \div y^4 = \left(\frac{x}{y}\right)^4$
- $\frac{x^5}{7^5} = \left(\frac{x}{7}\right)^5$

(২) $a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$

উদাহরণ:

- $5^0 = 1$
- $(-3)^0 = 1$

(৩) $a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0)$

উদাহরণ:

- $a^{-1} = \frac{1}{a}$
- $x^{-5} = \frac{1}{x^5} (x \neq 0)$
- $3^{-1} = \frac{1}{3}$

(৪) $(a^m)^n = a^{mn}$

উদাহরণ:

- $a^m \times b^m = (ab)^m$
- $(x^3)^5 = x^{15}$
- $x^5 \times y^5 = (xy)^5$

(৫) $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

$(\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}}$

উদাহরণ:

- $\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$
- $(\sqrt[5]{x})^2 = x^{\frac{2}{5}}$

a^0 এর ব্যাখ্যা (শূণ্য সূচক)

$\rightarrow \dfrac{a^p}{a^p} = 1$

$= a^{p-p}$ এখানে, $\boxed{a \neq 0}$

$= a^0$

$= 1$

$\rightarrow \dfrac{0^0}{0^0}$

$= 0^{0-0} \rightarrow$ অসংজ্ঞায়িত $[\ 0^0 =$ অসংজ্ঞায়িত $]$

$0^0 =$ অনির্ণেয় আকার

ধনাত্মক সূচক

- $a^{-n} = \frac{1}{a^n} (a \neq 0, n \in \mathbb{N})$
- $(a^n)^{\frac{1}{n}} = a^{n \cdot \frac{1}{n}}$

$= a^1$

$= a$

n তম মূল (n^{th} Root)

- $x^2 = P$

$\Rightarrow x = \sqrt{P}$

$\Rightarrow x = P^{\frac{1}{2}}$

- $x^3 = P$

$\Rightarrow x = \sqrt[3]{P}$

$\Rightarrow x = P^{\frac{1}{3}}$

- $x^4 = P$

$\Rightarrow x = \sqrt[4]{P}$

$\Rightarrow x = P^{\frac{1}{4}}$

$\Rightarrow x = P^{\frac{1}{4}}$

এখানে,

$2^{2^{3^2}}$

এক্ষেত্রে নিয়ম হলো উপর থেকে হিসাব করা:

উদা: $2^{2^{3^2}} \rightarrow 2^{2^9} \rightarrow 2^{512} =$ ☐

• n মূলের জন্য

$x^n = P$

$\Rightarrow x = \sqrt[n]{P}$

$\Rightarrow x = p^{\frac{1}{n}}$

- **$a > 0, \; a \neq 1$ শর্তে**

$a^x = a^y$ হলে, $x = y$

- **$a > 0, \; b > 0, \; x \neq 0$ শর্তে**

$a^x = b^x$ হলে, $a = b$

সতর্কতা :

VS

ax^{-1}

$= a \cdot \frac{1}{x}$

$= \frac{a}{x}$

$(ax)^{-1}$

$= \frac{1}{ax}$

[ভগ্নাংশে -1 থাকলে ডিগবাজি, মানে উল্টে যাবে]

লগারিদম

- **$a^x = N$ $(a > 0. a \neq 1)$ হলে, $x = log_a N$ কে N এর a ভিত্তিক লগ বলা হয়।**
- লগারিদমকে সংক্ষেপে লগ (log) লেখা হয়।

লগ লেখার নিয়ম-

$$\log_a y^p$$

p → Power বা ঘাত

y → পরিবর্তন

a → Base বা ভিত্তি

যেমন- $y = log_a x^p$

\# সূচকীয় এর বিপরীত হলো লগারিদম

\# লগের বিপরীত হলো সূচকীয়

- $y = a^x$ → জায়গা পরিবর্তন করলে → $x = \log_a y$

- $\log_a(MNP \ldots) = \log_a M + \log_a N + \log_a P + \cdots$

  কিন্তু, $\log(M \pm N) \neq \log_a M \pm \log_a N$

- $\log_a \left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$

সংখ্যার বৈজ্ঞানিক রূপ

হিসেবের সুবিধার্থে অনেক বড় বা অনেক ছোট সংখ্যাকে $a \times 10^n$ আকারে প্রকাশ করা হয়। যেখানে $1 \leq a < 10$ এবং $n \in \mathbb{Z}$ । কোন সংখ্যার $a \times 10^n$ রূপকে বলা হয় সংখ্যাটির বৈজ্ঞানিক বা আদর্শ রূপ।

$a \times 10^n$ → **সূচক**

$1 \leq a < 10$ → **যেকোনো সংখ্যা**

Note:-

$\log_a b \rightarrow a > 0; a \neq 1; b > 0; b \neq 1$

$= \log x$

$= \log$ এর ক্ষেত্রে x এর মান $(0, \infty)$

log ফাংশনের ডোমেন , $x = (0, \infty)$

$\therefore$ বৈজ্ঞানিক রূপ : $a \times 10^n$ $(1 \leq a < 10$ এবং $n \in \mathbb{Z})$

log এর ক্ষেত্রে x এর মান 0 থেকে বড়। এক্ষেত্রে $(0, \infty)$ যেখানে x এর ডোমেন 0 থেকে বড়।

সূচক হতে লগের কিছু মাধ্যম নির্ণয়

সূচকের মাধ্যমে	লগের মাধ্যমে	সূচকের মাধ্যমে	লগের মাধ্যমে
$10^2 = 100$	$\log_{10} 100 = 2$	$10^0 = 1$	$\log_r 1 = 0$
$3^{-2} = \frac{1}{9}$	$\log_3 \frac{1}{9} = -2$	$e^0 = 1$	$\log_e 1 = 0$
$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$	$\log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$	$a^0 = 1$	$\log_a 1 = 0$
$2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\log_2 \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}$	$10^1 = 10$	$\log_{10} 10 = 1$

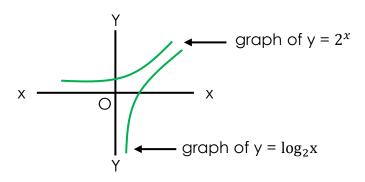
ক্যালকুলেটরের সাহায্যে বৈজ্ঞানিক রূপ-

$$\boxed{Digit} \rightarrow \boxed{=} \rightarrow \boxed{ENG}$$

অনেক বড় বা ছোট সংখ্যাকে $a \times 10^n$ আকারে প্রকাশ করা হয়। এখানে $1 \leq a < 10$ এবং $n \in \mathbb{Z}$ । কোন সংখ্যার $a \times 10^n$ রূপকে বলা হয় ঐ সংখ্যাটির বৈজ্ঞানিক রূপ।

$$a \times 10^n$$

$$1 \leq a < 10$$

লগারিদমের ভিত্তি উল্লেখ না থাকলে রাশির বীজগাণিতীয় ক্ষেত্রে e কে এবং সংখ্যার ক্ষেত্রে একককে ভিত্তি হিসেবে ধরা হয়। লগ সারণিতে ভিত্তি 10 ধরতে হয়।

x এর মান কোন ঋণাত্মক সংখ্যা নয়, এর মান 0 থেকে বড়।

লগারিদম পদ্ধতি

→ লগ প্রধানত দুই প্রকার। যথা:-

i) স্বাভাবিক লগারিদম (ln)

ii) সাধারণ লগারিদম (log)

সাধারণ লগের পূর্ণক

একটি সংখ্যা N কে বৈজ্ঞানিক আকারে প্রকাশ করে পাই,

$N = a \times 10^n$ যেখানে $N > 0, 1 \leq a < 10$ এবং $n \in \mathbb{Z}$ ।

উভয় পক্ষে 10 ভিত্তিক লগ নিয়ে পাই,

$\log_{10}N = n + \log_{10}a$

 # n কে বলা হয় $\log N$ এর পূর্ণক।

N	N এর বৈজ্ঞানিক রূপ	সূচক	দশমিক বিন্দুর বামের অংশের অঙ্কসংখ্যা 1 ও 2। দশমিক বিন্দু ও এর পরবর্তী সার্থক অঙ্কের মাঝে 0 এর সংখ্যা	পূর্ণক
6237	6.237×10^3	3	4	$4 - 1 = 3$
623.7	6.237×10^2	2	3	$3 - 1 = 2$
0.6237	6.237×10^{-1}	-1	0	$-(0 + 1) = -1 = \bar{1}$
0.06237	6.237×10^{-2}	-2	1	$-(1 + 1) = -2 = \bar{2}$

i) স্বাভাবিক লগারিদম (Natural Logarithm) :

Calculator এ $\boxed{AC} \rightarrow \boxed{\ln}$

স্কটল্যান্ডের গণিতবিদ জন নেপিয়ার (1550-1617) ১৬১৪ সালে e কে ভিত্তি ধরে প্রথম লগারিদম সম্পর্কিত বই প্রকাশ করেন। e একটি অমূলদ সংখ্যা, $e = 2.71828 \ldots$ । একে তত্ত্বীয় লগারিদম→ নেপলিয়ন লগারিদম→ e ভিত্তিক লগারিদম বলা হয়। $\log_e x$ কে $\ln x$ আকারেও লেখা হয়।

ii) সাধারণ লগারিদম (Common Logarithm) :

ইংল্যান্ডের গণিতবিদ হেনরি ব্রিগস (1561-1630) ১৬২৪ সালে 10 কে ভিত্তি ধরে লগারিদমের টেবিল তৈরী করেন। একে ব্রিগস টেবিল বলে। এই লগারিদমকে $\log_{10} x$ আকারে লেখা যায়।

বি.দ্র.: log এ ভিত্তির কথা উল্লেখ না থাকলে রাশির বীজগণিতীয় ক্ষেত্রে e কে এবং সংখ্যার ক্ষেত্রে 10 কে ভিত্তি হিসেবে ধরা হয়। log সারণিতে ভিত্তি 10 ধরতে হয়।

সাধারণ লগের অংশক

কোন সংখ্যার সাধারণ লগের অংশক, 1 অপেক্ষা ছোট একটি অঋণাত্মক সংখ্যা। এটি মূলত অমূলদ সংখ্যা। তবে একটি নির্দিষ্ট দশমিক স্থান পর্যন্ত অংশকের মান বের করা হয়। কোন সংখ্যার লগের অংশক লগ তালিকা থেকে বের করা যায়। আবার তা ক্যালকুলেটরের সাহায্যেও বের করা যায়।

অংশক ও পূর্ণকের উদাহরণ:

$$0.0000836 = \frac{8.36}{100000}$$

$$= 8.36 \times 10^{-5}$$

এখানে পূর্ণক -5 বা একে $\bar{5}$ (5 বার /Bar) দ্বারাও প্রকাশ করা হয়।

$$\log 8.36 = 0.92221$$

এই 0.92221 ই হলো অংশক।

সতর্কতা: অংশক বা পূর্ণকের ক্ষেত্রে $1 \leq a < 10$ এই নিয়মটি মেনে চলা আবশ্যক।

$\log_e x$ বা $\ln x$ আকারে স্বাভাবিক লগারিদম এবং $\log_{10} x$ কে সাধারণ লগারিদম বলা হয়।

লগারিদমের ভিত্তি উল্লেখ না থাকলে বীজগাণিতীয় রাশির ক্ষেত্রে e এবং সংখ্যার ক্ষেত্রে 10 কে ভিত্তি হিসেবে ধরা হয়।

মনে রাখার সহজ কৌশল

প্রদত্ত সংখ্যার পূর্ণ অংশে যতগুলো অংক থাকবে, সংখ্যাটির লগারিদমের পূর্ণক হবে সেই অঙ্কসংখ্যার চেয়ে 1 কম এবং তা হবে ধনাত্মক। অর্থাৎ উল্লেখিত অঙ্কসংখ্যা m হলে সংখ্যাটির লগারিদমের পূর্ণক হবে $m-1$।

প্রদত্ত সংখ্যার পূর্ণ অংশ না থাকলে দশমিক বিন্দু ও এর পরের প্রথম সার্থক অঙ্কের মাঝে যতগুলো 0 থাকবে, সংখ্যাটির লগারিদমের পূর্ণক হবে 0 সংখ্যার চেয়ে 1 বেশি এবং তা হবে ঋণাত্মক। অর্থাৎ উল্লিখিত 0 সংখ্যা k হলে সংখ্যাটির লগারিদমের পূর্ণক হবে $\{-(k+1)\}$।

পূর্ণক ঋণাত্মক হলে পূর্ণকটির বামে $(-)$ চিহ্ন না দিয়ে উপরে বার $(\bar{k})$ হিসেবে লিখা যায়।

সংখ্যার বৈজ্ঞানিক রূপ : $a \times 10^n \ (1 \leq a < 10, n \in \mathbb{Z})$

স্বাভাবিক লগারিদম e ভিত্তিক এবং সাধারণ লগারিদম 10 ভিত্তিক।

- $\log_a 0 \rightarrow$ অসংজ্ঞায়িত
- $\log_a(-1) \rightarrow$ অসংজ্ঞায়িত
- $\log_a 1 \rightarrow$ এর মান 0
- $\log 1 \rightarrow 0$
- $\log_e e \rightarrow 1$
- $\log_{10} 0.000000001 = -9$

আলোর বেগ $= 3 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}$

$$= 3 \times 100000000 \text{ ms}^{-1}$$

$$= 300000000$$

সূচকের সূত্রাবলি

ধরি, $a \in \mathbb{R}$ (বাস্তব সংখ্যার সেট) এবং $m, n \in \mathbb{N}$ (স্বাভাবিক সংখ্যার সেট)

সূত্র- i (গুণ): $a^m \times a^n = a^{m+n}$

সূত্র- ii (ভাগ): $\frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n} & \text{যখন } m \geq n \\ \frac{1}{a^{n-m}} & \text{যখন } n > m \end{cases}$

সূত্র- iii (গুণফলের ঘাত): $(ab)^n = a^n \times b^n$

সূত্র- iv (ভাগফলের ঘাত): $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \; (b \neq 0)$

সূত্র- v (ঘাতের ঘাত): $(a^m)^n = a^{mn}$

লগারিদমের সূত্রাবলি

(1) $x = \log_a N$ হলে, $a^x = N$

(2) $\log_a a = 1 \ (a > 0, \ a \neq 1)$

(3) $\log_a 1 = 0 \ \ (a > 0 \ a \neq 1)$

(4) $\log_a M^r = r\log_a M$

(5) $\log_a MN = \log_a M + \log_a N \ \ (a > 0, M > 0, N > 0)$

(6) $\log_a \left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$

বি.দ্র. : $\log_a (M - N) \neq \log_a M - \log_a N$ $\qquad \log_a \frac{M}{N} \neq \frac{\log_a M}{\log_a N}$

(7) $\log_a m = \log_b m \times \log_a b = \frac{\log_b^m}{\log_b^a}$ অথবা $\log_a m = \log_e m \times \log_a e = \frac{\log_e m}{\log_e a} = \frac{\ln m}{\ln a}$

(8) $\log_a \sqrt{M} = \log_a (M)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log_a (M)$

(9) $\log_a b \times \log_b a = 1$

(10) $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ অথবা $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$

Type-1
সূচক

Model Example-1

$$\frac{2^{n+4}-4.2^{n+1}}{2^{n+2}\div 2}$$

$$=\frac{2^{n+4}-2^2.2^{n+1}}{2^{n+2-1}}$$

$$=\frac{2^n.2^4-2^3.2^n}{2^{n+1}}$$

$$=\frac{2^n(2^4-2^3)}{2^n.2^1}$$

$$=\frac{8}{2}$$

$$=4 \qquad \text{(Ans)}$$

Model Example-2

$$\frac{3^{m+1}}{(3^m)^{m-1}}\div\frac{9^{m+1}}{(3^{m-1})^{m+1}}$$

$$=\frac{3^{m+1}}{3^{m^2-m}}\div\frac{(3^2)^{m+1}}{3^{m^2-1}}$$

$$=3^{m+1-m^2+m}\div 3^{2m+2-m^2+1}$$

$$=3^{m+1-m^2+m-2m-2+m^2-1}$$

$$=3^{-2}$$

$$=\frac{1}{3^2} \qquad =\frac{1}{9} \quad \text{(Ans)}$$

Now Practice:

1. $\frac{2^{n+1}.3^{2n-m}.5^{m+n}.6^n}{6^n.10^{m+2}.15^n}$ $\quad Ans: \frac{1}{50}$

2. $(2a^{-1}+3b^{-1})^{-1}$ $\quad Ans: \frac{ab}{3a+2b}$

3. দেখাও যে, $\left(\frac{x^q}{x^r}\right)^{q+r-p}\times\left(\frac{x^r}{x^p}\right)^{r+p-q}\times\left(\frac{x^p}{x^q}\right)^{p+q-r}=1$

Type-2
সূচক

সমাধান কর:

Model Example-1

$$2^x + 2^{1-x} = 3$$

$$\Rightarrow 2^x + \frac{2^1}{2^x} = 3$$

$$\Rightarrow \frac{(2^x)^2 + 2}{2^x} = 3$$

$$\Rightarrow (2^x)^2 + 2 = 3.2^x$$

$$\Rightarrow a^2 + 2 = 3a \qquad [2^x = a \text{ ধরে}]$$

$$\Rightarrow a^2 - 3a + 2 = 0$$

$$\Rightarrow a^2 - 2a - a + 2 = 0$$

$$\Rightarrow a(a-2) - 1(a-2) = 0$$

$$\Rightarrow (a-1)(a-2) = 0$$

হয় $a - 1 = 0$ অথবা $a - 2 = 0$

$\Rightarrow a = 1$ $\qquad$ $\Rightarrow a = 2$

$\Rightarrow 2^x = 1$ $\qquad$ $\Rightarrow 2^x = 2^1$

$\Rightarrow 2^x = 2^0$ $\qquad$ $\Rightarrow x = 1$

$\Rightarrow x = 0$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $X = 0,1$ (Ans)

Now Practice:

1. $(\sqrt{3})^{x+1} = (\sqrt[3]{3})^{2x-1}$ $\qquad$ $Ans: x = 5$

2. যদি $a^x = b, b^y = c, \ c^z = a$ হয়।

   তবে দেখাও যে, $xyz = 1$

3. $2^{2x+1} = 128$ $\qquad$ $Ans: x = 3$

Logarithm

Type-3

Model Example-1

$$\log_{10}\frac{50}{147} = \log_{10}2 + 2\log_{10}5 - \log_{10}3 - 2\log_{10}7$$

Solve:

$L.H.S = \log_{10}\frac{50}{147}$

$= \log_{10} 50 - \log_{10} 147$

$= \log_{10}(2 \times 5 \times 5) - \log_{10}(3 \times 7 \times 7)$

$= \log_{10}(2 \times 5^2) - \log_{10}(3 \times 7^2)$

$= \log_{10} 2 + \log_{10} 5^2 - \log_{10} 3 - \log_{10} 7^2$

$= \log_{10} 2 + 2\log_{10} 5 - \log_{10} 3 - 2\log_{10} 7$

$= R.H.S$ (proved)

Model Example-2

$$\frac{\log_{10}\sqrt{27}+\log_{10}8-\log_{10}\sqrt{1000}}{\log_{10}1\cdot 2}$$

$$= \frac{\log_{10}(3^3)^{\frac{1}{2}}+\log_{10} 2^3-\log_{10}(10^3)^{\frac{1}{2}}}{\log_{10}\frac{12}{10}}$$

$$=\frac{\log_{10}3^{\frac{3}{2}}+\log_{10}2^{3}-\log_{10}10^{\frac{3}{2}}}{\log_{10}12-\log_{10}10}$$

$$=\frac{\frac{3}{2}\log_{10}3+3\ \log_{10}2-\frac{3}{2}\log_{10}10}{\log_{10}(3\times2^{2})-\log_{10}10}$$

$$=\frac{\frac{3}{2}(\log_{10}10^{3}+\ 2\log_{10}10^{2}-1)}{(\log_{10}10^{3}+\ 2\log_{10}10^{2}-1)}\quad[\log_{10}10=1]$$

$$=\frac{3}{2}\quad \text{(Ans)}$$

Model Example-3

মান নির্ণয় কর: $\log_{2\sqrt{5}}400$

Solve:

$$\log_{2\sqrt{5}}400$$

$$=\log_{2\sqrt{5}}16\times25$$

$$=\log_{2\sqrt{5}}2^{4}\times5^{2}$$

$$=\log_{2\sqrt{5}}2^{4}.(\sqrt{5})^{4}$$

$$=\log_{2\sqrt{5}}(2\sqrt{5})^{4}$$

$$=4\log_{2\sqrt{5}}2\sqrt{5}$$

$$=4.1$$

$$=4\qquad \text{(Ans)}$$

Type-4

Model Example-4

সমাধান কর: $3^x = 16$

$\Rightarrow \log 3^x = \log 16$

$\Rightarrow x \log 3 = \log 16$

$\Rightarrow x = \frac{\log 16}{\log 3}$

$\therefore x = 2.52$ [ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে]

Now Practice:

1. $\frac{\log\sqrt{y^3} + y\log x - \frac{y}{x}\log(xz)}{\log(xy) - \log z}$ এর মান নির্ণয় কর যখন x=2, y=3, z=5 $Ans: \frac{3}{2}$

2. $\log_x 324 = 4$ হলে x এর মান নির্ণয় কর। $Ans: 3\sqrt{2}$

অধ্যায়ের গুরুত্বপূর্ণ সমস্যাগুলো

1. সরল কর: $\frac{2^{n+4}-4\times2^{n+1}}{2^{n+2}\div2}$

2. সরল কর : $\frac{3^{m+1}}{(3^m)^{m-1}} \div \frac{9^{m+1}}{(3^{m-1})^{m+1}}$

3. প্রমাণ করঃ $\left(\frac{x^p}{x^q}\right)^{p+q-r} . \left(\frac{x^q}{x^r}\right)^{q+r-p} . \left(\frac{x^r}{x^p}\right)^{r+p-q} = 1$

4. প্রমাণ করঃ $\left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{\frac{1}{ab}} . \left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{\frac{1}{bc}} \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{\frac{1}{ca}} = 1$

5. $P = x^a, Q = x^b, R = x^c$ হলে দেখাও যে,

$$\left(\frac{P}{Q}\right)^{a^2+ab+b^2} . \left(\frac{Q}{R}\right)^{b^2+bc+c^2} . \left(\frac{R}{P}\right)^{c^2+ca+a^2} = 1$$

6. $x = 2, y = 3, z = 5, w = 7$ হলে,

(ক) $w\log\frac{xz}{y^2} - x\log\frac{z^2}{x^2y} + y\log\frac{y^4}{x^4z}$ এর মান নির্ণয় কর।

(খ) $\frac{log\sqrt{y^3}+y\,logx-\frac{y}{x}log(xz)}{\log(xy)-\log z} = \log_y\sqrt{y^3}$

SOLVED CQ

১। $P = (12)^{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{54} \div \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{4}}$

$Q = \log 81 + \log 6 - \log 2\sqrt{3}$

$R = \log 9\sqrt{3}$

(ক) 2 এর 256 ভিত্তিক লগ নির্ণয় কর।

(খ) P এর সরল মান নির্ণয় কর।

(গ) “ $\frac{Q}{R}$ এর সরল মান $\frac{9}{5}$ ” উক্তিটি যাচাই কর ।

উত্তর

(ক)

$$\log_{256} 2$$
$$= \log_{256} (256)^{\frac{1}{8}}$$
$$= \frac{1}{8} \log_{256} 256$$
$$= \frac{1}{8} \text{(Ans)}$$

(খ) দেওয়া আছে,

$$P = (12)^{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{54} \div \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{4}}$$

$$= \frac{(4 \times 3)^{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{27 \times 2}}{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2^2}}}$$

$$= \frac{(2\sqrt{3}) \times (27)^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{3}}}{\frac{\sqrt{3}}{2^{\frac{2}{3}}}}$$

$$= \frac{2\sqrt{3} \times 3 \times 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{3}}$$

$$= 3 \times 2^2$$

$= 12$ (Ans)

(গ) দেওয়া আছে,

$$Q = \log 81 + \log 6 - \log 2\sqrt{3}$$

$$R = \log 9\sqrt{3}$$

$$\therefore Q = \log 81 + \log 6 - \log 2\sqrt{3}$$

$$= \log \frac{81 \times 6}{2\sqrt{3}}$$

$$= \log(81\sqrt{3})$$

$$= \log(\sqrt{3})^8 \sqrt{3}$$

$$= 9\log\sqrt{3}$$

$\therefore R = \log 9\sqrt{3}$

$= \log\left(\sqrt{3}\right)^4\sqrt{3}$

$= \log\left(\sqrt{3}\right)^4\sqrt{3}$

$= 5\log\sqrt{3}$

$= 5\log\sqrt{3}$

বামপক্ষ $= \frac{Q}{R}$

$= \frac{9\log\sqrt{3}}{5\log\sqrt{3}}$

$= \frac{9}{5}$

$=$ ডানপক্ষ

$\therefore$ "$\frac{Q}{R}$ এর সরল মান $\frac{9}{5}$" — উক্তিটি সত্য।

২। $A = \log_{2\sqrt{5}}8000$

$$B = \frac{\log_{10}\sqrt{125} + \log_{10}27 - \log_{10}\sqrt{1000}}{\log_{10}4 \cdot 5}$$

$$C = \frac{9^{m+1}}{(3^{m-1})^{m+1}} \div \frac{3^{m+1}}{(3^m)^{m-1}}$$

(ক) A এর সরল মান নির্ণয় কর।

(খ) দেখাও যে, $B = \frac{3}{2}$

(গ) প্রমাণ কর যে, $C = AB$

উত্তর

(ক) দেওয়া আছে,

$$A = \log_{2\sqrt{5}}8000$$
$$= \log_{2\sqrt{5}}(2\sqrt{5})^6$$
$$= 6\log_{2\sqrt{5}}2\sqrt{5}$$
$$= 6 \text{ (Ans)}$$

(খ) দেওয়া আছে,

$$B = \frac{\log_{10}\sqrt{125} + \log_{10}27 - \log_{10}\sqrt{1000}}{\log_{10}4 \cdot 5}$$

$$= \frac{\log_{10}(\frac{5\sqrt{5} \times 3^3}{10\sqrt{10}})}{\log_{10}\left(\frac{9}{2}\right)}$$

$$= \frac{\log_{10}\left(\frac{\sqrt{5} \times 3}{\sqrt{10}}\right)^3}{\log_{10}\left(\frac{9}{2}\right)}$$

$$= \frac{\log_{10}\left(\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{2}}\right)^3}{\log_{10}\left(\frac{9}{2}\right)}$$

$$= \frac{\log_{10}\left(\frac{9}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\log_{10}\left(\frac{9}{2}\right)}$$

$$= \frac{3}{2} \times \frac{\log\frac{9}{2}}{\log\frac{9}{2}}$$

$= \frac{3}{2}$ (দেখানো হলো)

(গ) দেওয়া আছে,

$$C = \frac{9^{m+1}}{(3^{m-1})^{m+1}} \div \frac{3^{m+1}}{(3^m)^{m-1}}$$

$$= \frac{3^{2m+2}}{3^{m^2-1}} \div \frac{3^{m+1}}{3^{m^2-m}}$$

$$= 3^{2m+2-m^2+1} \div 3^{m+1-m^2+m}$$

$$= 3^{2m+3-m^2} \div 3^{1-m^2+2m}$$

$$= \frac{3^{2m+3-m^2}}{3^{1-m^2+2m}}$$

$$= 3^{2^{m}+3-m^2-1+m^2-2m}$$

$$= 3^2$$

$$= 9$$

(ক) হতে পাই, $A = 6$

(খ) হতে পাই, $B = \frac{3}{2}$

$$\therefore AB = 6 \times \frac{3}{2} = 9$$

$\therefore C = AB$ (প্রমাণিত)

৩। $A = \dfrac{3 \cdot 2^x - 4 \cdot 2^{x-2}}{2^x - 2^{x-1}}$

$B = \dfrac{2^{x+4} - 4 \cdot 2^{x+1}}{2^{x+2} \div 2}$

$C = 3^x + 3^{1-x}$

(ক) $B = 2^{-x}$ হলে x এর মান বের কর।

(খ) $AB = 16$ প্রমাণ কর।

(গ)"$C = 4$ হলে x এর সম্ভাব্য মান 0 অথবা 1"— উক্তিটির যথার্থতা নিরূপন কর।

উত্তর

(ক) দেওয়া আছে,

$$B = \frac{2^{x+4} - 4 \cdot 2^{x+1}}{2^{x+2} \div 2} = 2^{-x}$$

$$\Rightarrow 2^{-x} = \frac{2^{x+4} - 2^2 \cdot 2^{x+1}}{2^{x+1}}$$

$$\Rightarrow 2^{-x} = \frac{2^x(2^4 - 2^3)}{2^{x+1}}$$

$$\Rightarrow 2^{-x} = \frac{2^x \cdot 8}{2^x \cdot 2^1}$$

$$\Rightarrow 2^{-x} = \frac{8}{2}$$

$$\Rightarrow 2^{-x} = 4$$

$$\Rightarrow 2^{-x} = 2^2$$

$$\Rightarrow -x = 2$$

$$\Rightarrow x = -2$$

$\therefore x = -2$ (Ans)

(খ) দেওয়া আছে,

$$A = \frac{3.2^x - 4.2^{x-2}}{2^x - 2^{x-1}}$$

$$A = \frac{3 \cdot 2^x - 2^2 \cdot 2^{x-2}}{2^x - 2^x \cdot 2^{-1}}$$

$$= \frac{3 \cdot 2^x - 2^2 \cdot 2^x \cdot 2^{-2}}{2^x(1 - \cdot 2^{-1})}$$

$$= \frac{2^x(3 - 2^2 \cdot 2^{-2})}{2^x\left(1 - \frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{2^x \times 2}{\frac{2^x}{2}}$$

$$= \frac{2^x \times 2 \times 2}{2^x}$$

$$= 4$$

দেওয়া আছে,

$$B = \frac{2^{x+4} - 4 \cdot 2^{x+1}}{2^{x+2} \div 2}$$

$$= \frac{2^x \cdot 2^4 - 2^2 \cdot 2^x . 2^1}{2^{x+1}}$$

$$= \frac{2^x \cdot 2^4 - 2^3 \cdot 2^x}{2^x \cdot 2^1}$$

$$= \frac{2^x \cdot (2^4 - 2^3)}{2^x \cdot 2^1}$$

$$= \frac{8}{2} = 4$$

$\therefore A \times B = 4 \times 4 = 16$ (প্রমাণিত)

(গ) দেওয়া আছে,

$$C = 3^x + 3^{1-x} = 4$$

$\therefore 3^x + 3^{1-x} = 4$

বা, $3^x + 3^1 \cdot \frac{1}{3^x} = 4$

বা, $3^x + \frac{3}{3^x} = 4$

বা, $(3^x)^2 - 4(3^x) + 3 = 0$

বা, $a^2 - 4a + 3 = 0$ [$3^x = a$ ধরে]

বা, $a^2 - 3a - a + 3 = 0$

বা, $a(a-3) - 1\,(a-3) = 0$

বা, $(a-1)(a-3) = 0$

হয়,

$a = 1$

$3^x = 1$

$3^x = 3^0$

$x = 0$

অথবা,

$a = 3$

$3^x = 3^1$

$x = 1$

$\therefore x$ এর সম্ভাব্য মান 0 ও 1 হতে পারে।

৪। $x = 2, y = 3, z = 5, w = 7,\ R = [a - \{a^{-1} + (b^{-1} - a)^{-1}\}^{-1}] \div a^2b$

(ক) $5\log3 - \log9$ এর মান নির্ণয় কর।

(খ) মান নির্ণয় কর : $w\log\frac{xz}{y^2} - x\log\frac{z^2}{x^2y} + y\log\frac{y^4}{x^4z}$

(গ) R এর সরলীকরণ কর।

উত্তর

(ক) $5\log3 - \log9$

$= 5\log3 - \log3^2$

$= 5\log3 - 2\log3$

$= 3\log3$

$= \log3^3$

$= \log27$ (Ans)

(খ) $x = 2, y = 3, z = 5, w = 7$

$w\log\frac{xz}{y^2} - x\log\frac{z^2}{x^2y} + y\log\frac{y^4}{x^4z}$

$= 7\log\frac{2 \times 5}{3^2} - 2\log\frac{5^2}{2^2 \times 3} + 3\log\frac{3^4}{2^4 \times 5}$

$= 7\log2 + 7\log5 - 7\log3^2 - 2\log5^2 + 2\log2^2 - 2\log3 + 3\log3^4 - 3\log2^4 - 3\log5$

$= 7\log2 + 7\log5 - 14\log3 - 4\log5 + 4\log2 - 2\log3 + 12\log3 - 12\log2 - 3\log5$

$= 7\log2 + 4\log2 - 12\log2 + 7\log5 - 4\log5 - 3\log5 - 14\log3 + 2\log3 + 12\log3$

$= 7\log2 + 4\log2 - 12\log2 + 7\log5 - 4\log5 - 3\log5 - 14\log3 + 2\log3 + 12\log3$

$= -\log2$ (Ans)

(গ) দেওয়া আছে,

$$R = [a - \{a^{-1} + (b^{-1} - a)^{-1}\}^{-1}] \div a^2b$$

$$= \left[a - \left\{\frac{1}{a} + \left(\frac{1}{b} - a\right)^{-1}\right\}^{-1}\right] \div a^2b$$

$$= \left[a - \left\{\frac{1}{a} + \left(\frac{1 - ab}{b}\right)^{-1}\right\}^{-1}\right] \div a^2b$$

$$= \left[a - \left\{\frac{1}{a} + \frac{1}{\frac{1 - ab}{b}}\right\}^{-1}\right] \div a^2b$$

$$= \left[a - \left\{\frac{1}{a(1 - ab)}\right\}^{-1}\right] \div a^2b$$

$$= \left[a - \frac{1}{\frac{1}{a(1 - ab)}}\right] \div a^2b$$

$$= [a - a + a^2b] \div a^2b$$

$$= \frac{a^2b}{a^2b}$$

$$= 1 \text{ (Ans)}$$

৫। $\sqrt{\frac{p}{q}}+\sqrt{\frac{q}{p}}=3,\ l=xy^{a-1},\ m=xy^{b-1},\ n=xy^{c-1}$

(ক) $\log_7(\sqrt[7]{7}\cdot\sqrt{7})-\log_3\sqrt[3]{3}+\log_{2\sqrt{5}}400$

(খ) দেখাও যে, $\log(p+q)=\log3+\frac{1}{2}\log p+\frac{1}{2}\log q$

(গ) $(b+c)\log\left(\frac{m}{n}\right)+(c+a)\log\left(\frac{n}{l}\right)+(a+b)\log\left(\frac{l}{m}\right)=?$

উত্তর

(ক) $\log_7(\sqrt[7]{7}\cdot\sqrt{7})-\log_3\sqrt[3]{3}+\log_{2\sqrt{5}}400$

$$=\log_7\left(7^{\frac{1}{7}}\cdot7^{\frac{1}{2}}\right)-\log_3 3^{\frac{1}{3}}+\log_{2\sqrt{5}}\left(2\sqrt{5}\right)^4$$

$$=\log_7 7^{\frac{2+7}{14}}-\frac{1}{3}\cdot1+4\cdot1$$

$$=\log_7 7^{\frac{9}{14}}-\frac{1}{3}+4$$

$$=\frac{9}{14}\log_7 7-\frac{1}{3}+4=\frac{9}{14}\times1-\frac{1}{3}+4$$

$$=\frac{27-14+168}{42}=\frac{181}{42}$$ (Ans)

(খ) দেওয়া আছে,

$$\sqrt{\frac{p}{q}}+\sqrt{\frac{q}{p}}=3$$

বা, $\left(\sqrt{\frac{p}{q}}+\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2=3^2$

বা, $\left(\sqrt{\frac{p}{q}}\right)^2+2\sqrt{\frac{p}{q}}.\sqrt{\frac{q}{p}}+\left(\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2=9$

বা, $\frac{p}{q}+2\sqrt{\frac{pq}{pq}}+\frac{q}{p}=9$

বা, $\frac{p}{q}+\frac{q}{p}=7$

বা, $\frac{p^2+q^2}{pq}=7$

বা, $p^2+q^2=7pq$

বা, $(p+q)^2=9pq$ $[a^2+b^2=(a+b)^2-2ab]$

বা, $(p+q)=\sqrt{9pq}$

বা, $p+q=3\sqrt{pq}$

বামপক্ষ $=\log(p+q)$

$=\log 3\sqrt{pq}$ $=\log 3.\sqrt{p}.\sqrt{q}$

$=\log 3+\log\sqrt{p}+\log\sqrt{q}$

$=\log 3+\log p^{\frac{1}{2}}+\log q\frac{1}{2}$

$=\log 3+\frac{1}{2}\log P+\frac{1}{2}\log q^{\frac{1}{2}}$

$=$ **ডানপক্ষ** (প্রমাণিত)

(গ)

দেওয়া আছে,

$l = xy^{a-1}$

$m = xy^{b-1}$

$n = xy^{c-1}$

$(b+c)\log\left(\frac{m}{n}\right) + (c+a)\log\left(\frac{n}{l}\right) + (a+b)\log\left(\frac{l}{m}\right)$

$= (b+c)\log\left(\frac{y^{b-1}}{y^{c-1}}\right) + (c+a)\log\left(\frac{y^{c-1}}{y^{a-1}}\right) + (a+b)\log\left(\frac{y^{a-1}}{y^{b-1}}\right)$

$= (b+c)\log(y)^{b-c-1+1} + (c+a)\log(y)^{c-1-a+1} + (a+b)\log(y)^{a-1-b+1}$

$= (b+c)\log(y)^{b-c} + (c+a)\log(y)^{c-a} + (a+b)\log(y)^{a-b}$

$= \log y^{b^2-c^2} \times \log y^{c^2-a^2} \times \log y^{a^2-b^2}$

$= b^2\log y - c^2\log y + c^2\log y - a^2\log y + a^2\log y - b^2\log y$

$= 0$ (Ans)

৬। আন্ত:স্কুল বিতর্ক প্রতিযোগিতায় 'শিক্ষণ' প্রিপারেটরি হাইস্কুল এবং 'স্বপ্নতরী' আদর্শ বিদ্যানিকেতন অংশ নিচ্ছে। দেখা গেল শিক্ষণ সমর্থকদের সংখ্যা 'স্বপ্নতরী' থেকে $2\log_5\left(\sqrt[3]{5^2}\right)\cdot(\sqrt[3]{5})$ জন কম

(ক) 'স্বপ্নতরী' সমর্থকদের সংখ্যা 57 জন হলে 'শিক্ষণ' সামর্থকদের সংখ্যা কত?

(খ) মোট $30\log_{3\sqrt{2}}324$ জন উপস্থিত থাকলে উভয় দলের সমর্থক সংখ্যা গণনা কর।

(গ) বিতার্কিকদের সংখ্যা d 'শিক্ষণ' সমর্থকদের সংখ্যা S_1, এবং 'স্বপ্নতরী' সমর্থকদের সংখ্যা S_2, বিচারকদের সংখ্যা j হলে দেখাও যে,

$$\log\frac{d^3{S_1}^3}{S_2^3}+\log\frac{S_1^3S_2^3}{j^3}+\log\frac{S_2^3j^3}{d^3}-\log S_1^6\,.S_2^3=0$$

উত্তর

(ক) 'শিক্ষণ' সমর্থকদের সংখ্যা 'স্বপ্নতরী' সমর্থকদের থেকে $2\log_5\left(\sqrt[3]{5^2}\right)\cdot(\sqrt[3]{5})$ জন কম।

সুতরাং 'স্বপ্নতরী' সমর্থকদের সংখ্যা জন হলে 'শিক্ষণ' সমর্থকদের সংখ্যা, $57-2\log_5\left(\sqrt[3]{5^2}\right)\cdot(\sqrt[3]{5})$।

এখন, $57-2\log_5\left(\sqrt[3]{5^2}\right)\cdot(\sqrt[3]{5})$

$= 57-2\log_5(5^2)^{\frac{1}{3}}\cdot 5^{\frac{1}{3}}$

$= 57-2\log_5 5$

$= 57-2$

$= 55$

(খ)

প্রশ্নমতে,

মোট $30\log_{3\sqrt{2}}324$ জন সমর্থক আছে।
মনে করি,

$30\log_{3\sqrt{2}}324 = a$

$\Rightarrow (3\sqrt{2})^a = 324$

$\Rightarrow (3\sqrt{2})^a = (3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2)$

$\Rightarrow (3\sqrt{2})^a = 3^4.2^2$

$\Rightarrow (3\sqrt{2})^a = 3^4 \cdot (\sqrt{2})^4$

$\Rightarrow (3\sqrt{2})^a = (3\sqrt{2})^4$

$\Rightarrow a = 4$

$\therefore$ মোট (30×4) বা 120 জন উপস্থিত আছে।

এখন, 'শিক্ষণ' সমর্থকদের সংখ্যা x হলে

'স্বপ্নতরী' সমর্থকদের সংখ্যা $(x + 2)$ জন $[\because 2\log_5 \sqrt[3]{5^2} . \sqrt[3]{5} = 2]$

প্রশ্নমতে,

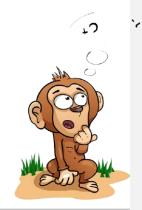
$x + x + 2 = 120$

$\Rightarrow 2x = 118$

$\Rightarrow x = \frac{118}{2}$

$\Rightarrow x = 59$

$\therefore$ 'শিক্ষণ' সমর্থকদের সংখ্যা 59 জন।

এবং 'স্বপ্নতরী' সমর্থকদের সংখ্যা $(59 + 2)$ জন $= 61$ জন।

(গ)

বামপক্ষ $= \log \frac{d^3 {S_1}^3}{S_2^3} + \log \frac{S_1^3 S_2^3}{j^3} + \log \frac{S_2^3 j^3}{d^3} - \log S_1^6 . S_2^3$

$= \log \left(\frac{d^3 {S_1}^3}{S_2^3} \times \frac{S_1^3 S_2^3}{j^3} \times \frac{S_2^3 j^3}{d^3} \right) - \log S_1^6 . S_2^3$

$= \log (S_1^{3+3} . S_2^3) - \log (S_1^6 . S_2^3)$

$= \log (S_1^6 . S_2^3) - \log (S_1^6 . S_2^3)$

$= 0$

$=$ **ডানপক্ষ**

$\therefore$ বামপক্ষ $=$ ডানপক্ষ (দেখানো হলো)

SOLVED MCQ

১। 7^n এর জন্য নিচের কোনটি সঠিক ?

(ক) n^7

(খ) n^{-7}

(গ) $7 \times 7 \times 7 \ldots n$ সংখ্যকবার

(ঘ) 7^7

উত্তরঃ (গ) $7 \times 7 \times 7 \ldots n$ সংখ্যকবার

২। সূচকীয় রাশি a^x এ a কে কী বলে ?

(ক) ঘাত

(খ) সূচক

(গ) ভিত্তি

(ঘ) শক্তি

উত্তরঃ (গ) ভিত্তি

৩। সূচকীয় রাশির—

i. ঘাত 4

ii. ভিত্তি 9

iii. ক্রমিকগুণন $9 \times 9 \times 9 \times 3 \times 3 \times 3$

নিচের কোনটি সঠিক ?

(ক) i ও ii

(খ) i ও iii

(গ) ii ও iii

(ঘ) i, ii ও iii

উত্তরঃ (ক) i ও ii

ব্যাখ্যা: কেননা, 9^4 এর ঘাত 4 এবং ভিত্তি 9 ।

কিন্তু ক্রমিক গুণ $= 9 \times 9 \times 9 \times 9$ **(Ans.)**

৪। $\frac{a^m}{a^n}$ এর মান কত ?

(ক) $a^{\frac{1}{n^2-m^2}}$ (খ) $a^{\frac{1}{m-n}}$ (গ) a^{m-n} (ঘ) a^{n-m}

উত্তরঃ (গ) a^{m-n}

ব্যাখ্যা: এখানে,

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad \textbf{(Ans.)}$$

৫। $4^{x+1} = 32$ হলে x এর মান কত ?

(ক) 1 (খ) $\frac{3}{2}$ (গ) $\frac{7}{2}$ (ঘ) $-\frac{3}{2}$

উত্তরঃ (খ) $\frac{3}{2}$

ব্যাখ্যা: এখানে,

$$4^{x+1} = 32$$

$$\Rightarrow 2^{2(x+1)} = 2^5$$

$$\Rightarrow 2^{2(x+1)} = 2^5$$

$$\Rightarrow 2(x+1) = 5$$

$$\Rightarrow 2x + 2 = 5$$

$$\Rightarrow 2x = 3$$

$$\therefore x = \frac{3}{2} \quad \textbf{(Ans.)}$$

৬। $m = 2n$ হলে $a^{m-n} \times a^{m+n}$ এর মান কত ?

(ক) a^{4n} (খ) a^{2n+m} (গ) a (ঘ) a^{mn}

উত্তরঃ (ক) a^{4n}

ব্যাখ্যা: এখানে,

$$a^{m-n} \times a^{m+n} = a^{m-n+m+n}$$
$$= a^{2m}$$
$$= a^{2(2n)} \; [\because m = 2n]$$
$$= a^{4n} \quad \textbf{(Ans.)}$$

৭। $\left(2x^{-1}\sqrt[3]{x^2}\right)^{-6}$ এর সরলীকরণ নিচের কোনটি ?

(ক) $\frac{x^2}{16}$ (খ) $\frac{x^2}{128}$ (গ) $\frac{x^2}{64}$ (ঘ) $\frac{x^2}{32}$

উত্তরঃ (গ) $\frac{x^2}{64}$

ব্যাখ্যা: এখানে,

$$\left(2x^{-1}\sqrt[3]{x^2}\right)^{-6}$$
$$= \left(\frac{2}{x} \times x^{\frac{2}{3}}\right)^{-6}$$
$$= \frac{1}{\left(\frac{2}{x} \times x^{\frac{2}{3}}\right)^{6}} = \frac{1}{\frac{2^6}{x^6} \times x^{\frac{12}{3}}}$$
$$= \frac{x^6}{2^6 \times x^4} = \frac{x^2}{64} \quad \textbf{(Ans.)}$$

৮। $y^m \times \frac{y}{y^{-n}} = ?$

(ক) y^{m-n+1} (খ) y^{m+n+1} (গ) y^{-mn+1} (ঘ) y^{m-n-1}

উত্তরঃ (খ) y^{m+n+1}

ব্যাখ্যা: এখানে,

$$y^n \times \frac{y}{y^{-n}}$$

$$= y^m \times y^1 \times y^n = y^{m+1+n}$$

$$= y^{m+n+1}$$ **(Ans.)**

৯। $(2a^{-1})^{-1} = ?$

(ক) $\frac{2}{a}$ (খ) $\frac{a}{2}$ (গ) $2a$ (ঘ) $\frac{1}{2a}$

উত্তরঃ (খ) $\frac{a}{2}$

ব্যাখ্যা: এখানে,

$$(2a^{-1})^{-1} = \left(\frac{2}{a}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{2}{a}}$$

$$= \frac{a}{2}$$ **(Ans.)**

১০। কোন শর্তে $a^x = b^x$ হলে $a = b$ হবে ?

(ক) $a = 0,\ b = 0,\ x \neq 0$

(খ) $a > 0,\ b > 0,\ x \neq 1$

(গ) $a > 1,\ b > 1,\ x \neq 0$

(ঘ) $a > 0,\ b > 0,\ x \neq 0$

উত্তরঃ (ঘ) $a > 0,\ b > 0,\ x \neq 0$

১১। $x, y \in \mathbb{N}$ হলে—

i) $5^x \times 5^y = 5^{x+y}$

ii) $5^x \div 5^y = 5^{x-y}$

iii) $5^x + 5^y = 5^{y \div x}$

নিচের কোনটি সঠিক ?

(ক) i ও ii

(খ) i ও iii

(গ) ii ও iii

(ঘ) i, ii ও iii

উত্তরঃ (ক) i ও ii

ব্যাখ্যা: এখানে,

$x, y \in \mathbb{N}$

i) $5^x \times 5^y = 5^{x+y}$

ii) $5^x \div 5^y = 5^{x-y}$

iii) $5^x + 5^y \neq 5^{y \div x}$ **(Ans.)**

১২। $a^{pq-pr} \cdot a^{qr-pq} \cdot a^{pr-qr} = ?$

(ক) 0 (খ) 1 (গ) $a^{2(pq+qr+pr)}$ (ঘ) $a^{-2(pq+qr+pr)}$

উত্তরঃ (খ) 1

ব্যাখ্যা: এখানে,

$$a^{pq-pr} \cdot a^{qr-pq} \cdot a^{pr-qr}$$
$$= a^{pq-pr+qr-pq+pr-qr} = a^0$$
$$= 1 \quad \textbf{(Ans.)}$$

১৩। $\frac{2\cdot 2^n}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^{-n}}} = ?$

(ক) $2^{2(n+1)}$ (খ) 2^{2n-1} (গ) 4 (ঘ) 2^0

উত্তরঃ (গ) 4

ব্যাখ্যা: এখানে,

$$\frac{2\cdot 2^n}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^{-n}}} = \frac{2\cdot 2^n}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^{-n}}}$$
$$= \frac{2\cdot 2^n}{\frac{1}{2}\cdot 2^n}$$
$$= \frac{2\times 2}{1} = 4 \quad \textbf{(Ans.)}$$

নিচের তথ্যের ভিত্তিতে ১৪ ও ১৫ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

$M = \frac{4^m - 1}{2^m - 1}, \ N = \frac{4^{m+1} 4^{m-1}}{16^m}, \ R = log_9 \sqrt{3}$

১৪। M এর সরল ফল নিচের কোনটি ?

(ক) $2^m + 1$ (খ) $2^m - 1$ (গ) 2^{m+1} (ঘ) 2^{m-1}

উত্তরঃ (ক) $2^m + 1$

ব্যাখ্যা: এখানে,

$$M = \frac{4^m - 1}{2^m - 1} = \frac{2^{2m} - 1}{2^m - 1}$$

$$= \frac{(2^m)^2 - 1^2}{2^m - 1} = \frac{(2^m + 1)(2^m - 1)}{(2^m - 1)}$$

$$= 2^m + 1$$ **(Ans.)**

১৫। নিচের কোনটি $\frac{M}{N}$ এর সরল প্রকাশ করে ?

(ক) $2^m - 1$ (খ) $2^m + 1$ (গ) 2^{m-1} (ঘ) $a^{-2(pq+qr+pr)}$

উত্তরঃ (খ) $2^m + 1$

ব্যাখ্যা: এখানে,

$M = 2^m + 1$ [১৪ নং হতে]

$$N = \frac{4^{m+1} 4^{m-1}}{16^m} = \frac{4^{m+1} \cdot 4^{m-1}}{4^{2m}}$$

$$= 4^{m+1+m-1-2m} = 4^0 = 1$$

$$\therefore \frac{M}{N} = \frac{2^m + 1}{1} = 2^m + 1$$ **(Ans.)**

১৬। স্বাভাবিক লগারিদমকে কী বলে ?

(ক) ব্যবহারিক লগারিদম

(খ) নেপিরিয়ান লগারিদম

(গ) 10 ভিত্তিক লগারিদম

(ঘ) ব্রিগস লগারিদম

উত্তরঃ (খ) নেপিরিয়ান লগারিদম

১৭। সাধারণ লগারিদমকে কী বলে?

(ক) e ভিত্তিক লগারিদম

(খ) নেপিরিয়ান লগারিদম

(গ) ব্রিগস লগারিদম

(ঘ) কোনটিই

উত্তরঃ (গ) ব্রিগস লগারিদম

১৮। $log_x 25 = 2$ হলে x এর মান কত ?

(ক) 25

(খ) ± 5

(গ) 5

(ঘ) -5

উত্তরঃ (গ) 5

ব্যাখ্যা: এখানে,

$\log_x 25 = 2$

$\Rightarrow 25 = x^2$

$\Rightarrow x^2 = 5^2$

$\Rightarrow x = 5$ [$\because x > 0$, কেননা ধনাত্মক ভিত্তির বাস্তব মান আছে]

১৯। $2\sqrt{2}$ এর 2 ভিত্তিক লগ কত?

(ক) $\frac{3}{2}$ (খ) $\frac{2}{3}$ (গ) 5 (ঘ) -5

উত্তরঃ (ক) $\frac{3}{2}$

ব্যাখ্যা: এখানে,

$$\log_2 2\sqrt{2} = \log_2 2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = \log_2 2^{1+\frac{1}{2}}$$

$$= \log_2 2^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \quad \textbf{(Ans.)}$$

২০। $log\ x = \frac{1}{2} log\ y$ হলে $log\ x^2$ এর মান কত ?

(ক) x (খ) y (গ) $\log y$ (ঘ) $\log\sqrt{y}$

উত্তরঃ (গ) $\log y$

ব্যাখ্যা: এখানে,

$$\log x = \frac{1}{2}\log y$$

$$\Rightarrow 2\log x = \log y$$

$$\therefore \log x^2 = \log y \quad \textbf{(Ans.)}$$

২১। $log_{25}5 + log_{\sqrt{5}}5 = ?$

(ক) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (খ) 1 (গ) $2\frac{1}{2}$ (ঘ) 4

উত্তরঃ (গ) $2\frac{1}{2}$

ব্যাখ্যা: এখানে,

$$\log_{25}5 + \log_{\sqrt{5}}5 = \log_{25}(25)^{\frac{1}{2}} + \log_{\sqrt{5}}\left(\sqrt{5}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2} + 2$$

$$= 2\frac{1}{2} \quad \textbf{(Ans.)}$$

২২। $(2^{-1} \cdot 3^{-1})^{-1} = ?$

(ক) 6 (খ) $\frac{1}{3}$ (গ) $\frac{1}{2}$ (ঘ) $\log_{10}x = -3$

উত্তরঃ (ক) 6

ব্যাখ্যা: এখানে,

$$(2^{-1} \cdot 3^{-1})^{-1} = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\right)^{-1}$$

$$= \left(\frac{1}{6}\right)^{-1}$$

$$= 6 \quad \textbf{(Ans.)}$$

২৩। $log_{2\sqrt{3}}144$ এর মান কত ?

(ক) 4 (খ) $2\sqrt{3}$ (গ) 2 (ঘ) $\sqrt{3}$

উত্তরঃ (ক) 4

ব্যাখ্যা: এখানে,

$$\log_{2\sqrt{3}}144 = \log_{2\sqrt{3}}(2\sqrt{3})^4 = 4\log_{2\sqrt{3}}2\sqrt{3} = 4 \quad \textbf{(Ans.)}$$

২৪। $log_{10}x = -3$ হলে x এর মান কত ?

(ক) 30 (খ) 10 (গ) x^{-3} (ঘ) 10^{-3}

উত্তরঃ (ঘ) 10^{-3}

২৫। $log_4 2 \times log_{\sqrt{3}}27 = ?$

(ক) 3 (খ) 6 (গ) 9 (ঘ) 27

উত্তরঃ (ক) 3

ব্যাখ্যা: এখানে,

$$\log_4 2 \times \log_{\sqrt{3}}27 = \log_4(4)^{\frac{1}{2}} \times \log_{\sqrt{3}}(\sqrt{3})^6$$

$$= \frac{1}{2}\log_4 4 \times 6\log_{\sqrt{3}}\sqrt{3}$$

$$= \frac{1}{2} \times 6 = 3 \quad \textbf{(Ans.)}$$

২৬। $7\sqrt[3]{7}$ এর 7 ভিত্তিক log নিচের কোনটি ?

(ক) $\frac{3}{4}$ (খ) $\frac{3}{2}$ (গ) $\frac{4}{3}$ (ঘ) $\frac{2}{3}$

উত্তরঃ (গ) $\frac{4}{3}$

ব্যাখ্যা:

এখানে,

$$\log_7 7\sqrt[3]{7} = \log_7 7 \cdot 7^{\frac{1}{3}} = \log_7 2^{1+\frac{1}{3}} = \log_7 7^{\frac{4}{3}}$$

$$= \frac{4}{3}\log_7 7 = \frac{4}{3} \quad \text{(Ans.)}$$

২৭। $log_{12} 2\sqrt{3} - log_{\frac{1}{2}} 2 = ?$

(ক) 0 (খ) 1 (গ) $\frac{1}{2}$ (ঘ) $\frac{3}{2}$

উত্তরঃ (ঘ) $\frac{3}{2}$

ব্যাখ্যা:

এখানে,

$$\log_{12} 2\sqrt{3} - \log_{\frac{1}{2}} 2 = \log_{12} 12^{\frac{1}{2}} - \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$$

$$= \frac{1}{2}\log_{12} 12 - (-1)\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} + 1$$

$$= \frac{3}{2} \quad \text{(Ans.)}$$

২৮। নিচের কোন শর্তে $log_a a = 1$ হবে ?

(ক) $a > 0$ (খ) $a \neq 1$ (গ) $a > 0,\ a \neq 1$ (ঘ) $a > 1,\ a \neq 0$

উত্তরঃ (গ) $a > 0,\ a \neq 1$

২৯। $log_x 625 = 4$ হলে x এর মান কত ?

(ক) 2 (খ) 4 (গ) 5 (ঘ) 25

উত্তরঃ (গ) 5

ব্যাখ্যা:

এখানে,

$$\log_x 625 = 4 \Rightarrow 625 = x^4 \Rightarrow x^4 = 5^4$$

$\therefore x = 5$ (Ans.)

৩০। $log1$ এর মান কত ?

(ক) 0 (খ) 1 (গ) 2 (ঘ) 3

উত্তরঃ (ক) 0

ব্যাখ্যা:

$\log 1$ কে বলা যায় $\log_{10} 1$ অর্থাৎ, $\log 1 = \log_{10} 1$

ধরি, $\log_{10} 1 = x$

$\Rightarrow 10^x = 1$

$\Rightarrow 10^x = 10^0$

$\therefore x = 0$ (Ans.)

৩১। $log_a 200 = 2$ হলে a এর মান কত ?

(ক) $10\sqrt{2}$ (খ) $5\sqrt[3]{2}$ (গ) $5\sqrt{3}$ (ঘ) $10\sqrt{5}$

উত্তরঃ (ক) $10\sqrt{2}$

ব্যাখ্যা:

এখানে,

$\log_a 200 = 2$

$\therefore a^2 = 200$

$\Rightarrow a^2 = (10\sqrt{2})^2$

$\therefore a = 10\sqrt{2}$ (Ans.)

৩২। $log_e x^{-1} = ?$

(ক) $-\ln x$ (খ) $\log\frac{1}{x}$ (গ) $-\log x^2$ (ঘ) $\log\sqrt{x}$

উত্তরঃ $-\ln x$

ব্যাখ্যা:

এখানে,

$$\log_e x^{-1} = -\log_e x$$
$$= -\ln x \text{ (Ans.)}$$

৩৩। ভিত্তি বের কর যখন $\frac{1}{a}$ এর লগ -1

(ক) a (খ) $\frac{1}{a}$ (গ) -1 (ঘ) 1

উত্তরঃ (ক) a

ব্যাখ্যা:

এখানে,

প্রশ্নমতে, ভিত্তি $= x$ হলে

$$\log_x \frac{1}{a} = -1$$
$$\Rightarrow x^{-1} = \frac{1}{a}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{a}$$
$$\therefore x = a \qquad \text{(Ans.)}$$

৩৪। $a^x = b^y$ হলে নিচের কোন সম্পর্কটি সঠিক ?

(ক) $\frac{x}{y}\log_b a = 0$ (খ) $\frac{x}{y}\log_a b = 0$ (গ) $x = y\log_a b$ (ঘ) $b = a^{\frac{y}{x}}$

উত্তরঃ (গ) $x = y\log_a b$

ব্যাখ্যা:

এখানে,

$a^x = M,\ b^y = M$ হলে $a^x = b^y$

$\Rightarrow (a^x)^{\frac{1}{y}} = (b^y)^{\frac{1}{y}}$

$\Rightarrow b = a^{\frac{x}{y}}$

$\Rightarrow \log_a b = \frac{x}{y}$

$\Rightarrow x = y\log_a b$ (Ans.)

৩৫। 1600 এর লগ 4 হলে ভিত্তি কত ?

(ক) $2\sqrt{5}$ (খ) $2\sqrt{10}$ (গ) $10\sqrt{2}$ (ঘ) $3\sqrt{2}$

উত্তরঃ (খ) $2\sqrt{10}$

ব্যাখ্যা:

এখানে,

প্রশ্নমতে, ভিত্তি $= x$ হলে

$\log_x 1600 = 4$

$\Rightarrow x^4 = 1600$

$\Rightarrow x^4 = \left(2\sqrt{10}\right)^4$

$\Rightarrow x = 2\sqrt{10}$ (Ans.)

৩৬। তথ্যগুলো লক্ষ্য কর—

i) $a^x = M$ হলে $x = \log_a M$

ii) $\log_a 1 = 0$ যখন $a > 0, a \neq 1$

iii) $\log_a(M+N) = \log_a M + \log_a N$ $[a > 0,\ a \neq 1,\ M, N \neq 0]$

নিচের কোনটি সঠিক ?

(ক) i ও ii (খ) ii ও iii (গ) i ও iii (ঘ) i, ii ও iii

উত্তরঃ (ক) i ও ii

৩৭। 10 ভিত্তিক *log* এর ক্ষেত্রে —

i) $\log 1 = 0$ ii) $\log 0 = 1$ iii) $\log 100 = 2$

নিচের কোনটি সঠিক ?

(ক) i ও ii (খ) ii ও iii (গ) i ও iii (ঘ) i, ii ও iii

উত্তরঃ (গ) i ও iii

ব্যাখ্যা:

i. $10^0 = 1$ [সঠিক, কারণ $x^0 = 1$]

ii. $10^1 \neq 0$ [কারণ $x^1 = x$]

iii. $10^2 = 100$ [সঠিক]

$\therefore$ Ans. = i, iii

৩৮। $a > 0, \ b > 0, \ a \neq 1, \ b \neq 1$ হলে —

i) $\log_a b \times \log_b a = 1$

ii) $\log_a M^r = M\log_a r$

iii) $\log_a \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt{a} = \frac{5}{6}$

নিচের কোনটি সঠিক ?

(ক) i ও ii (খ) ii ও iii (গ) i ও iii (ঘ) i, ii ও iii

উত্তরঃ (গ) i ও iii

ব্যাখ্যা:

এখানে,

$a > 0, \ b > 0, \ a \neq 1, \ b \neq 1$

i) $\log_a b \times \log_b a = 1$

ii) $\log_a M^r \neq M\log_a r \ [\log_a M^r = r\log_a M]$

iii) $\log_a \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt{a} = \log_a a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = \log_a a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}} = \log_a a^{\frac{5}{6}}$

$= \frac{5}{6} \ [\because \ \log_a a = 1]$

$\therefore$ Ans. = i, iii

$0 \cdot 0225$ সংখ্যাটি বিবেচনা করে ৪০ ও ৪১ নং প্রশ্নের উত্তর দাও —

৩৯। সংখ্যাটির a^n আকার নিচের কোনটি?

(ক) $(2.5)^2$ (খ) $(0.015)^2$ (গ) $(1.5)^2$ (ঘ) $(0.15)^2$

উত্তরঃ (ঘ) $(0.15)^2$

ব্যাখ্যা:

এখানে,

0.0225 সংখ্যাটির বর্গমূল 0.15

সুতরাং $(0.15)^2 = 0.0225$

অর্থাৎ, $a^n = (0.15)^2$, যেখানে $a = 0.15$

$\therefore n = 2$ (Ans.)

৪০। সংখ্যাটির বৈজ্ঞানিক আকার নিচের কোনটি?

(ক) 225×10^{-4} (খ) 22.5×10^{-3} (গ) 2.25×10^{-2} (ঘ) $0 \cdot 222 \times 10^{-1}$

উত্তরঃ (খ) 22.5×10^{-3}

ব্যাখ্যা:

এখানে,

$0.0225 = 22.5 \times 10^{-3}$

ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে,

$\boxed{0.0225} \triangleright \boxed{=} \triangleright \boxed{ENG}$

৪১। 5570 সংখ্যাটিরপূর্ণক কত ?

(ক) 4 (খ) 3 (গ) 2 (ঘ) 0

উত্তরঃ (খ) 3

ব্যাখ্যা:

$\log 5570 = 3 \cdot 74$

$\therefore$ পূর্ণক $= 3$

৪২। 0.006237 এর পূর্ণক –

(ক) 2 (খ) -2 (গ) -3 (ঘ) 3

উত্তরঃ (গ) -3

ব্যাখ্যা:

$\log 0.006237 = -2.20 \ldots$

$\therefore$ পূর্ণক $= -(2+1) = -3$ (Ans.)

৪৩। $m + n = 2$ হলে $(-1)^n \times (-1)^m \times (-1)^2$ এর মান কত ?

(ক) 2 (খ) 1 (গ) -2 (ঘ) 4

উত্তরঃ (খ) 1

ব্যাখ্যা:

$(-1)^n \times (-1)^m \times (-1)^2$

$= -1^{m+n+2}$

$= -1^{2+2} = (-1)^4$

$= 1$ (Ans.)

৪৪। $0 \cdot 0000000037$ এর বৈজ্ঞানিক রূপ কোনটি ?

(ক) $\frac{3^7}{10^7}$ (খ) 37×10^{10} (গ) 37×10^{-10} (ঘ) 3.7×10^{-9}

উত্তরঃ (ঘ) 3.7×10^{-9}

ব্যাখ্যা: ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে,

$\boxed{0 \cdot 0000000037} \triangleright \boxed{\equiv} \triangleright \boxed{ENG}$

$0 \cdot 0000000037 = 3.7 \times 10^{-9}$ (Ans.)

৪৫। আদর্শ রূপ $a \times 10^n$ আকারের সংখ্যার n এর জন্য প্রযোজ্য নিচের কোনটি ?

(ক) $n \in \mathbb{Z}$ (খ) $n \in \mathbb{R}$ (গ) $n \in N$ (ঘ) $n \in Q$

উত্তরঃ (ক) $n \in \mathbb{Z}$

৪৬। স্বাভাবিক লগারিদম নিচের কোনটি ?

(ক) $\log x$ (খ) $\ln x$ (গ) $\log 2$ (ঘ) $\log 3$

উত্তরঃ (খ) $\ln x$

৪৭। $a \times 10^n$ আকারের বৈজ্ঞানিক সংখ্যা—

i) হলো আদর্শ রূপ

ii) যেখানে $1 \leq a < 10$

iii) যেখানে $n \in \mathbb{Z}$

নিচের কোনটি সঠিক ?

(ক) i ও ii (খ) ii ও iii (গ) i ও iii (ঘ) i, ii ও iii

উত্তরঃ (ঘ) i, ii ও iii

৪৮। $A = 10^{n+1}$ হলে, এর পূর্ণক কত ?

(ক) 10 (খ) $n+1$ (গ) n (ঘ) 1

উত্তরঃ (খ) $n+1$

ব্যাখ্যা:

$$A = 10^{n+1}$$
$$\Rightarrow \log A = log \cdot 10^{n+1}$$
$$\Rightarrow \log A = (n+1)log \cdot 10$$
$\therefore$ পূর্ণক $= n+1$ (Ans.)

৫৯। 2717 এর অংশক কত হবে? (ক্যালকুলেটরের সাহায্যে)

(ক) 0.43408 (খ) 10.043408 (গ) 4.3408 (ঘ) 43.408

উত্তরঃ (ক) 0.43408

ব্যাখ্যা: ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে,

log ▷ 2717 ▷ =

$$\log 2717 = 3.43408$$
$\therefore$ 2717 এর অংশক $= 0.43408$ (Ans.)